

Индивидуальное домашнее задание по теме “Линейные пространства. Линейные операторы”

Задача 1.

1. Доказать, что система векторов a_1, a_2, a_3, a_4 является линейно зависимой. Найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.
2. Найти базис и размерность подпространства, натянутого на эти векторы. Выразить через базисные остальные векторы системы.
3. Найти координаты вектора $b = (12, 13, 25)$ в полученном базисе.
4. Найти матрицу перехода от полученного базиса к базису $a'_1 = (0, -4, 3)$, $a'_2 = (8, 7, -2)$, $a'_3 = (1, 2, 5)$.

Варианты заданий:

1. $a_1 = (2, 4, -6)$, $a_2 = (3, -3, -5)$, $a_3 = (-3, 6, -1)$, $a_4 = (2, -4, 2)$,
2. $a_1 = (7, 1, -2)$, $a_2 = (-2, 5, -1)$, $a_3 = (0, 3, 0)$, $a_4 = (-2, 9, 1)$,
3. $a_1 = (-4, -4, 0)$, $a_2 = (5, 4, -2)$, $a_3 = (3, -3, 7)$, $a_4 = (1, 0, -1)$,
4. $a_1 = (2, 4, 0)$, $a_2 = (-3, 0, 2)$, $a_3 = (2, 6, -1)$, $a_4 = (3, 1, 1)$,
5. $a_1 = (1, 4, -6)$, $a_2 = (0, 1, -2)$, $a_3 = (-3, 1, -1)$, $a_4 = (2, -4, 2)$,
6. $a_1 = (7, 1, -2)$, $a_2 = (-2, 5, -1)$, $a_3 = (-1, 1, 1)$, $a_4 = (0, -3, 2)$,
7. $a_1 = (2, 4, 2)$, $a_2 = (0, 1, -2)$, $a_3 = (0, -3, 2)$, $a_4 = (-3, 5, -1)$,
8. $a_1 = (-1, -5, 0)$, $a_2 = (1, 5, -1)$, $a_3 = (2, -3, -2)$, $a_4 = (7, 4, -2)$,
9. $a_1 = (-4, -5, 0)$, $a_2 = (7, 4, -2)$, $a_3 = (0, -3, -2)$, $a_4 = (1, 0, -1)$,
10. $a_1 = (7, 1, -2)$, $a_2 = (1, 5, -1)$, $a_3 = (0, 3, 0)$, $a_4 = (2, 4, 0)$,
11. $a_1 = (1, 4, -6)$, $a_2 = (3, 0, -5)$, $a_3 = (-3, 6, -1)$, $a_4 = (2, -4, 2)$,
12. $a_1 = (-2, 4, -2)$, $a_2 = (0, 1, -2)$, $a_3 = (5, -3, 0)$, $a_4 = (-3, 5, -1)$,
13. $a_1 = (7, 1, -2)$, $a_2 = (-2, 5, -1)$, $a_3 = (-2, 1, 1)$, $a_4 = (0, 3, 2)$,
14. $a_1 = (2, 4, -6)$, $a_2 = (-3, 0, 1)$, $a_3 = (-3, 6, -1)$, $a_4 = (3, 1, 1)$,
15. $a_1 = (-1, 1, 2)$, $a_2 = (7, 1, -2)$, $a_3 = (0, -3, 2)$, $a_4 = (-3, 5, -1)$.

Задача 2.

1. Доказать, что оператор $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящий векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ в векторы e'_1, e'_2, e'_3 , является линейным.

2. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
3. Найти образы векторов a_4 и b задачи 1 при действии оператора f .
4. Найти матрицу оператора f при переходе от базиса e_1, e_2, e_3 к базису, полученному в задаче 1.
5. Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы оператора f над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Варианты заданий:

1. $e'_1 = 2e_1 - e_2$, $e'_2 = 3e_1 - e_2$, $e'_3 = -e_2 - e_3$,
2. $e'_1 = 5e_1 - 2e_2 - e_3$, $e'_2 = -e_1 - e_2 + 4e_3$, $e'_3 = e_2 + e_3$,
3. $e'_1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3$,
4. $e'_1 = 2e_1 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 - 3e_2$, $e'_3 = -e_1 - e_3$,
5. $e'_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 - 3e_3$, $e'_3 = e_2 + 2e_3$,
6. $e'_1 = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_3 - 3e_3$,
7. $e'_1 = 2e_1 - e_2$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$,
8. $e'_1 = 2e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_1 - 3e_2 + 2e_3$,
9. $e'_1 = e_1 + 2e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$,
10. $e'_1 = 2e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = -3e_1 + e_2$, $e'_3 = -e_2 + e_3$,
11. $e'_1 = e_1 - 3e_2 + 4e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $e'_3 = 2e_2 + e_3$,
12. $e'_1 = e_1 - 3e_2 + 2e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $e'_3 = e_2 + e_3$,
13. $e'_1 = 2e_1$, $e'_2 = -e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 - 2e_2 + 2e_3$,
14. $e'_1 = e_1 - e_3$, $e'_2 = -3e_2$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2$,
15. $e'_1 = -e_2$, $e'_2 = -e_1 - e_2 - e_3$, $e'_3 = 2e_1 + e_2$,