

Вопросы к экзамену по курсу "Алгебра и теория чисел"
1 курс

1. Теория делимости. Основные понятия и теоремы.
2. Наибольший общий делитель. Определение и свойства. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное.
3. Простые числа. Единственность разложения числа на простые сомножители. Решето Эратосфена.
4. Непрерывные дроби. Связь с алгоритмом Евклида.
5. Множества. Действия над множествами. Отношения. Определения, примеры.
6. Отображения. Образ и прообраз. Свойства отображений. Определения, примеры.
7. Умножение отображений. Определение, примеры, свойства.
8. Обратное отображение. Определение, примеры, свойства.
9. Перестановки. Определение, примеры, свойства. Инверсия перестановки.
10. Подстановки. Определение, примеры, свойства. Транспозиция подстановок.
11. Алгебраическая операция. Определение, примеры, свойства. Нейтральный элемент. Симметричный элемент.
12. Группа. Определение. Свойства. Примеры.
13. Подгруппа. Определение. Критерий подгруппы. Примеры.
14. Изоморфизм групп. Определение. Свойства. Примеры.
15. Кольцо. Определение. Свойства. Примеры. Подкольцо.
16. Поле. Определение. Свойства. Примеры. Подполе.
17. Поле комплексных чисел.
18. Операции над комплексными числами. Комплексно-сопряженные числа. Свойства. Комплексная плоскость.
19. Тригонометрическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра-Лапласа.
20. Извлечение корней из комплексных чисел.
21. Функции $[x]$, $\{x\}$. Мультипликативные функции. Определения. Свойства. Примеры.
22. Число делителей и сумма делителей натурального числа. Функция Эйлера.

23. Сравнения. Определение и свойства.
24. Полная и приведенная системы вычетов по модулю m .
25. Кольцо \mathbb{Z}_m .
26. Сравнения с одним неизвестным. Основные определения. Решение сравнений первой степени.
27. Решение систем сравнений первой степени.
28. Сравнения произвольной степени по простому модулю.
29. Сравнения произвольной степени по составному модулю.
30. Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты. Общие теоремы.
31. Символы Лежандра и Якоби. Свойства. Приложение к определению разрешимости сравнений второй степени.
32. Показатели. Первообразные корни. Определения. Свойства. Примеры.
33. Индексы. Определения. Свойства. Примеры Индексы по модулям p^α и $2p^\alpha$.
34. Приложения теории сравнений к алгоритмам шифрования. Примеры.
35. Кольцо многочленов одной переменной.
36. Деление с остатком в кольце многочленов. Свойства делимости многочленов.
37. Наибольший общий делитель в кольце многочленов. Алгоритм Евклида.
38. Неприводимые многочлены. Определение. Свойства. Примеры.
39. Каноническое разложение многочленов. Определение. Свойства. Примеры
40. Корни многочленов. Схема Горнера.
41. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
42. Рациональные дроби.
43. Многочлены с рациональными коэффициентами. Задача нахождения целых и рациональных корней многочлена.
44. Кольцо многочленов нескольких переменных.
45. Линейные пространства. Определение. Примеры. Свойства.
46. Линейная зависимость векторов. Определение. Примеры. Свойства.
47. Базис. Размерность пространства. Координаты вектора в фиксированном базисе.

48. Связь между базисами. Формула преобразования координат при замене базиса.
49. Подпространство. Определение. Примеры. Общий способ построения подпространства.
50. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Определения. Примеры.
51. Линейные операторы. Определение, свойства, примеры.
52. Изоморфизмы линейных пространств.
53. Действия над линейными операторами.
54. Матрица линейного оператора.
55. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Подобные матрицы.
56. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
57. Квадратичные формы. Определение. Примеры. Свойства.
58. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
59. Билинейные формы.

Лектор
старший преподаватель

Дубровина О.В.