

Материалы к зачету по курсу "Алгебра и теория чисел"
1 курс, 2 семестр

Определения и формулировки.

1. Класс чисел по модулю m .
2. Полная система вычетов по модулю m .
3. Приведенная система вычетов по модулю m .
4. Функции $[x]$, $\{x\}$.
5. Функция Эйлера.
6. Символ Лежандра.
7. Показатель по модулю m .
8. Индекс по модулю m .
9. Первообразный корень по модулю m .
10. Кольцо многочленов одной переменной.
11. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов одной переменной.
12. Наибольший общий делитель многочленов одной переменной.
13. Алгоритм Евклида в кольце многочленов одной переменной.
14. Неприводимые многочлены.
15. Каноническое разложение многочленов одной переменной.
16. Корень многочлена одной переменной.
17. Формулы Виета
18. Схема Горнера.
19. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

20. Рациональная дробь.
21. Правильная дробь.
22. Простейшая дробь.
23. Линейное пространство.
24. Линейная зависимость (независимость) векторов.
25. Базис системы векторов.
26. Базис пространства
27. Размерность пространства.
28. Формула координат вектора в фиксированном базисе.
29. Формула преобразования координат при замене базиса.
30. Подпространство линейного пространства.
31. Пересечение подпространств.
32. Сумма подпространств.
33. Прямая сумма подпространств.
34. Линейный оператор.
35. Формулы действий над линейными операторами.
36. Матрица линейного оператора.
37. Изоморфизм линейных пространств.
38. Ранг линейного оператора.
39. Ядро линейного оператора.
40. Дефект линейного оператора.
41. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса.
42. Подобные матрицы.

43. Собственные значения линейного оператора.
44. Собственные векторы линейного оператора.
45. Квадратичные формы.
46. Формулы линейного преобразования переменных.
47. Канонический вид квадратичной формы.
48. Нормальный вид квадратичной формы.
49. Билинейные формы.

**Примеры задач для контрольной работы по курсу "Алгебра и
теория чисел"
1 курс, 2 семестр**

1. Решить сравнения:

(a) $13x \equiv 178 \pmod{153}$,

(b) $9x \equiv 12 \pmod{21}$

2. Решить систему сравнений $\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{13} \\ 5x \equiv 8 \pmod{17} \\ 3x \equiv 7 \pmod{31} \\ 14x \equiv 35 \pmod{19} \end{cases}$

3. Решить систему сравнений $\begin{cases} 3x \equiv 10 \pmod{10} \\ 2x \equiv 5 \pmod{15} \\ 7x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$

4. Найти все целочисленные решения уравнения $24x + 14y = -18$.

5. С помощью символа Лежандра установить имеет ли решение сравнение $x^2 \equiv 231 \pmod{101}$.

6. Решить сравнение $x^2 \equiv 6 \pmod{47}$.

7. Найти остаток от деления числа $3^{100} + 5^{100}$ на 7.

8. Разложить рациональную дробь $f(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ в сумму многочлена и простейших дробей над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .

9. Найти целые корни многочлена $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 12$.

10. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$.

11. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54$ на неприводимые множители над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .

12. Используя схему Горнера, вычислить $f(-2)$ и $f(i)$, если $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54$.
13. Используя схему Горнера, разложить многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 12$ по степеням $x + 1$.
14. В кольце $\mathbb{R}[x]$ найти многочлен $f(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений
- | | | | | |
|--------|----|----|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 3 | -2 | 1 | 5 |
15. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов $\sin x, \sin(x - 2), \cos x, \cos(x - 2)$.
16. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов $5^x, 7^x, 35^x$.
17. Вычислить ранг системы векторов $a_1 = (1, 4, 7, 10), a_2 = (1, 2, 3, 4), a_3 = (2, 5, 8, 11)$ и найти какой-либо базис в этой системе.
18. Вычислить ранг системы векторов $f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1, f_2(x) = 4x^2 + 3x + 2, f_3(x) = 4x^2 + 3x + 4$ и найти какой-либо базис в этой системе.
19. Доказать, что множество матриц $\left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right] \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ является подпространством линейного пространства матриц $\mathbb{R}_{\neq, \neq}$. Найти какой-либо базис и размерность этого подпространства.
20. Найти координаты многочлена $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$ в базисе пространства многочленов над полем \mathbb{R} степени ≤ 5 : $1, x + 1, x^2 + 1, x^3 + 1, x^4 + 1, x^5 + 1$.
21. Найти матрицу перехода от базиса (a_1, a_2) к базису (b_1, b_2) , если известны разложения векторов a_1, a_2, b_1, b_2 , в некотором базисе (e_1, e_2) : $a_1 = 3e_1 + 2e_2, a_2 = e_1 + e_2, b_1 = 2e_1 + e_2, b_2 = 5e_1 + 10e_2$.
22. Выяснить, является ли отображение $f(x) = x_2i + (x_1 + x_2)j - 3x_3k$ линейного пространства V_3 с координатами x_1, x_2, x_3 линейным и найти его матрицу в базисе i, j, k .

23. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе e_1, e_2, \dots, e_n вектор заменить e_1 на e_2 ?

24. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}_{3,3}$ в базисе e_1, e_2, e_3 . Найдите матрицу этого оператора в базисе $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 - e_2$.

25. Линейный оператор f в базисе $a_1 = (8, -6, 7), a_2 = (-16, 7, -13), a_3 = (7, -3, -7)$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $b_1 = (1, -2, 1), b_2 = (3, -1, 2), b_3 = (2, 1, 2)$.

26. В базисе $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, пространства матриц второго порядка над полем \mathbb{R} линейный оператор задан матрицей $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Линейный оператор f в базисе $a_1 = (1, 1), a_2 = (1, 2)$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, а линейный оператор φ в базисе $b_1 = (2, -1), b_2 = (-1, 1)$, имеет матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Найдите матрицу линейных операторов $f + \varphi$ и $f\varphi$ в базисе b_1, b_2 .

28. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе линейного пространства матрицей $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ а) над \mathbb{Q} ; б) над \mathbb{R} ; в) над \mathbb{C} .