Материалы к зачету по курсу "Алгебра и теория чисел"
1 курс, 1 семестр

Определения и формулировки.

1. Число a делит число b.
2. Неполное частное от деления числа на число b.
3. Остаток от деления числа на число b.
4. Делитель чисел a и b.
5. Наибольший общий делитель двух чисел.
6. Взаимно простые числа.
7. Формула наибольшего общего делителя по алгоритму Евклида.
8. Общее кратное чисел a и b.
9. Наименьшее общее кратное двух чисел.
10. Простое число.
11. Составное число.
12. Формула канонического разложения числа.
13. Непрерывная дробь.
14. Равные множества.
15. Объединение, пересечение, разность множеств.
16. Бинарное отношение.
17. Отношение эквивалентности.
18. Отображение.
19. Равные отображения.
20. Образ элемента.
21. Прообраз элемента.
22. Образ множества.
23. Прообраз множества.
24. Инъективное отображение.

25. Сюръективное отображение.
26. Биективное отображение.
27. Произведение (композиция) отображений.
28. Обратное отображение.
29. Формула обратного отображения для композиции двух отображений.
30. Перестановка.
31. Подстановка.
32. Инверсия перестановки.
33. Четная (нечетная) перестановка.
34. Транспозиция подстановки.
35. Четная (нечетная) подстановка.
36. Алгебраическая операция.
37. Коммутативная алгебраическая операция.
38. Ассоциативная алгебраическая операция.
39. Нейтральный элемент.
40. Симметричный элемент.
41. Группа.
42. Подгруппа.
43. Критерий подгруппы.
44. Порядок элемента группы.
45. Кольцо.
46. Подкольцо.
47. Критерий подкольца.
48. Поле.
49. Подполе.
50. Критерий подполя.
51. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа.

52. Модуль и аргумент комплексного числа.

53. Формулы сложения и умножения комплексных чисел в алгебраической и тригонометрической форме.

54. Формула Муавра.

55. Формула извлечения корня степени n из комплексного числа.

56. Первообразный корень степени n из комплексного числа.

57. Основная теорема алгебры комплексных чисел.

Теоретические вопросы.

1. Делимость чисел. Определение Примеры.
2. Наибольший общий делитель двух чисел. Вычисление НОД по алгоритму Евклида.
3. Наибольший общий делитель двух чисел. Вычисление НОД с помощью бинарного алгоритма.
4. Наименьшее общее кратное двух чисел. Свойства.
5. Простые и составные числа. Формула канонического разложения числа.
6. Непрерывные дроби.
7. Множества. Операции над множествами. Определения. Примеры.
8. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Определения. Примеры.
9. Отображение. Образ и прообраз элемента. Образ и прообраз множества. Определения. Примеры.
10. Свойства отображений Ц инъективное, сюръективное, биективное. Определения. Примеры.
11. Произведение (композиция) отображений. Определения. Примеры.
12. Обратное отображение. Определение. Примеры.
13. Перестановки. Четная (нечетная) подстановка. Определения. Примеры.
14. Подстановки. Четная (нечетная) перестановка. Определения. Примеры.
15. Алгебраическая операция. Определение. Свойства. Примеры.
16. Нейтральный элемент. Определение. Свойства. Примеры.
17. Симметричный элемент. Определение. Свойства. Примеры.
18. Группа. Определение. Свойства. Примеры.
19. Подгруппа. Определение. Свойства. Примеры. Критерий подгруппы.
20. Кольцо. Определение. Свойства. Примеры.
21. Подкольцо. Критерий подкольца.
22. Поле. Определение. Свойства полей. Примеры.
23. Подполе. Критерий подполя. Примеры.
24. Комплексное число. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Геометрическая интерпретация.
25. Формулы сложения и умножения комплексных чисел. Формула Муавра.

26. Формула извлечения корня степени из комплексного числа. Первообразный корень степени из комплексного числа.

27. Поле комплексных чисел как расширение поля действительных чисел. Основная теорема алгебры комплексных чисел.

Примеры задач для контрольной работы.

1. Найти наибольший общий делитель чисел 6188 и 4702, используя алгоритм Евклида или бинарный алгоритм.

2. Найти наименьшее общее кратное чисел 6188 и 4702.

3. Разложить рациональное число $\frac{83}{19}$ в непрерывную дробь.

4. Дана непрерывная дробь: $[2, 1, 3, 4, 1, 2]$. Найти соответствующее ей рациональное число.

5. Методом математической индукции доказать, что число $4^n + 15n - 1$ делится на 9 для любого натурального n.

6. Пусть $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $f(x) = x^4$. Проверить, является ли отображение инъективным, сюръективным и биективным. Существует ли для него обратное отображение (если да, то найти его)?

7. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$. Проверить, является ли отображение $f : X \to Y$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ инъективным, сюръективным и биективным.

8. Пусть Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : X \to X$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $g : X \to X$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить fg, gf, g^3, f^{-1}.

9. Найти отображения fg, gf, f^2, g^2, f^{-1}, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = cosx$.

10. Вычислить α^{-1}, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, β^2, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

11. Разложить подстановку $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ в произведение транспозиций. Определить характер четности этой подстановки.

12. Найти произведение транспозиций $(2, 5)(3, 4)(5, 6)(5, 6)$. Определить характер четности полученной подстановки.

13. Выписать транспозиции, посредством которых от перестановки $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ можно перейти к перестановке $(2, 5, 3, 1, 4, 6)$. Определить характер четности второй перестановки.

14. На множестве натуральных чисел алгебраическая операция задана равенством $a \circ b = a^2 + b^3$. Выяснить, является ли эта операция коммутативной, ассоциативной, существует ли нейтральный элемент, для каких элементов группы существуют симметричные элементы.

15. Выяснить, образуют ли группу элементы множества $\left\{a - b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ относительно операции умножения элементов?

16. Доказать, что множество матриц $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ является кольцом относительно операций сложения и умножения матриц. Является ли кольцо коммутативным? Является ли это кольцо полем?

17. Записать в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$. Изобразить эти числа на комплексной плоскости.

18. Вычислить

    (a) $\dfrac{(2+i)(3-2i)-3i}{(1-i)^2+2}$,

    (b) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$,

    (c) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{60}$,

    (d) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

19. Найти все значения корней из комплексных чисел

    (a) $\sqrt[4]{-4}$,

    (b) $\sqrt[3]{2-2i}$,

    (c) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

20. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

    (a) a) $1 < \mathrm{Re} z \leq 2$,

    (b) $|z+2-3i| \leq 5$,

    (c) $\left\{ \begin{array}{l} |z+i \geq 2| \\ |z| < 3 \end{array} \right.$,

    (d) $\left\{ \begin{array}{l} |z-1-i| \leq 1, \\ |\arg z| > \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$.